

Problem nadprodukcji

– matematyczna optymalizacja poziomu produkcji w cukierni



Odwiecznym problemem piekarzy i cukierników jest to, ile wyprodukować, żeby potem nie wyrzucać. Wiadomo, że w cukierni liczą się tylko wyroby wyprodukowane dzisiaj. Asortyment wczorajszy jest oddawany na zwroty lub sprzedawany za co najwyżej połowę wcześniejszej wartości. Jeżeli cukiernik jest zbyt zapobiegliwy, wypiecze zbyt małą ilość ciast, nie zarobi tyle, ile mógłby zarobić, gdyby zaryzykował i wypiekl więcej. Dodatkowym kosztem jest poziom niezadowolenia i rozczarowanie klientów. W przyszłości mogą oni znaleźć inną cukiernię, w której ich ulubione ciasto będzie zawsze dostępne.

Z kolei cukiernik ryzykant wypiecze zbyt dużo ciast i będzie musiał je potem wyprzedawać lub utylizować. Taka sytuacja również demoralizuje klientów. Pojawia się tacy, którzy nie kupią ciasta dzisiaj, aby jutro kupić je taniej.

Idealnie by było produkować tyle ciasta, aby starczyło dla wszystkich i nic się nie zmarnowało.

Machine learning przybywa na ratunek

Aby poradzić sobie z problemem, wystarczy zbudować model regresji liniowej oparty na danych pogodowych, dniach tygodnia, porze roku oraz innych zmiennych opisujących. Wynikiem będzie prognoza popytu na ciasta w danym dniu. Zazwyczaj w przypadku stabilnej sprzedaży prognozy regresyjne są wystarczająco skuteczne. Potrafią przewidzieć wielkość przyszłej sprzedaży na poziomie od $r^2 = 85$ do 95% . Ten tajemniczy r^2 to tzw. współczynnik determinacji, określający poziom dopasowania prognozy do stanu faktycznego. Model na poziomie $r^2 = 87\%$ myliłby się o 13% w obie strony.

Budowanie takich prognoz to oczywiście praca dla specjalisty, który najczęściej przy takim zleceniu uruchamia wszystkie znane mu i dostępne modele regresji, łącznie z konwolucyjnymi sieciami neuronowymi. Jest to duże przedsięwzięcie, w tym wypadku zupełnie nie uzasadnione. Przypomina to strzelanie do much z armaty.

Budowanie modeli ma sens, jeżeli jest odpowiednia skala przedsięwzięcia. Taka skala to na przykład poziom sprzedaży we wszystkich dniach następnych dwóch miesięcy dla kilkudziesięciu wyrobów w kilkunastu lokalizacjach. Taki model byłby na stałe „zaszyty” w systemie zarządzania produkcją i generowałby gotowe zlecenia produkcyjne z przyporządkowaniem konkretnych lokalizacji sprzedażowych. Można by go rozbudować o kolejne funkcjonalności, na przykład prognozy dla godzin sprzedaży, co pozwalałoby dostarczać pieczywo w optymalnej ilości na drugą zmianę.

Co ma zrobić cukiernik, który wszystko liczy w zeszycie?

Rozwiązania z zakresu *machine learning* są drogie i w małej skali mogą okazać się nieopłacalne. Stara prawda mówi, że aby przewidzieć coś w przyszłości, należy posłużyć się zapiskami z przeszłości.

Wyobraźmy sobie cukiernika, który zapisuje w zeszycie, ile ciast sprzedał każdego dnia. Załóżmy, że jutro jest czwartek. Cukiernik otwiera swój zeszyt i ogląda poziom sprzedaży z ostatnich 35 zwykłych czwartków. Następnie przepisuje dane do arkusza kalkulacyjnego. Poniżej znajduje się podsumowanie ostatniej sprzedaży. W pierwszej kolumnie jest liczba sprzedanych ciast. W drugiej widzimy, ile razy miała miejsce taka sprzedaż w ciągu analizowanych 35 dni.

Na przykład poziom sprzedaży 51 ciast cukiernik osiągnął w czterech różnych dniach w analizowanym okresie 35 dni.

Tabela 1. Rozkład ilości sprzedaży ciast w okresie 35 dni

Ile sztuk ciasta sprzedano?	Ile razy tak było?
50	3
51	4
52	2
53	3
54	3
55	5
56	3
57	4
58	3
59	3
60	2

Następnie cukiernik rozszerzył swoją tabelkę o dwie kolejne kolumny: „Prawdopodobieństwo” i „Skumulowane prawdopodobieństwo”.

Tabela 2. Rozkład prawdopodobieństwa sprzedaży ciast w okresie 35 dni

Ile sztuk ciasta sprzedano?	Ile razy tak było?	Prawdopodobieństwo	Skumulowane prawdopodobieństwo
50	3	0.086	0.086
51	4	0.114	0.2
52	2	0.057	0.257
53	3	0.086	0.343
54	3	0.086	0.429
55	5	0.143	0.571
56	3	0.086	0.657
57	4	0.114	0.771
58	3	0.086	0.857
59	3	0.086	0.943
60	2	0.057	1.0

$$g(k, p) = \begin{cases} z \times k, & \text{if } p \geq k \\ (z \times p) - (s \times (k - p)), & \text{if } p < k \end{cases}$$

(2)

Nie trudno zauważyć, że zarobimy tym więcej, im więcej sprzedamy. Z drugiej strony nadprodukcja powoduje spadek zysku. Innymi słowy, każde nadmierne wyprodukowane ciasto obniża nasz dzienny zysk.

Ile należy wyprodukować ciast, aby zarobić jak najwięcej?

W powyższym wzorze jak pamiętamy 25 zł to cena sprzedaży ciasta, 9 zł to cena przecenione-go ciasta, a 14 zł to techniczny koszt wytworzenia ciasta. Cukiernik wyprodukował 54 ciasta, z czego sprzedał 50, a 4 musiał przecenić.

$$530 = (50 \times 25) + (4 \times 9) - (54 \times 14)$$

policzono?

W główce tabeli (kolumny tabeli) wpisana jest liczba sprzedanych ciast od 50 do 60 sztuk, w boczku tabeli (wiersze tabeli) wpisana jest liczba produktów ciast od 50 do 60 sztuk. Wnętrze tabeli wypełnione jest obliczeniami zysku na sprzedaży. Tak więc zgodnie ze wzorem (2), gdy wyprodukowano 54 ciasta (piąty wiersz) i udało się sprzedać 50 ciast (pierwsza kolumna) zysk z działalności wyniósł 530 zł. Jak zostało to

W naszym przykładowym zysku ze sprzedaży ciasta to różnica między kosztem produkcji a ceną sprzedaży: 25 zł - 14 zł = 11 zł. Stratę jednostkową można natomiast zapisać w postaci: 14 zł - 9 zł = 5 zł. Wszystko więc zależy od tego, czy cukiernik wyprodukował więcej ciast (ilość wyprodukowana k) niż był na nie popyt (ilość sprzedana p). Gdy cukiernik wyprodukował za mało ciast k, zabrakło by ich dla wszystkich klientów p, czyli p > k. Relacje pomiędzy podanymi a podażą można zapisać prostym wzorem, gdzie „z” to zysk jednostkowy, „s” – strata jednostkowa opisana we wzorze (1).

c_1 jednostkowy koszt produkcji
 c_2 jednostkowa cena sprzedaży
 c_3 jednostkowa cena sprzedaży wyprzedzowej

$$\begin{cases} c_3 > c_1 > c_2 \\ (c_2 - c_1) = z, & \text{zysk ze sprzedaży} \\ (c_1 - c_3) = s, & \text{strata z tytułu wyprzedzowej} \end{cases}$$

(1)

Obliczenia do tych kolumn są bardzo proste. Jeżeli cukiernik sprzedał 3 razy w ciągu 35 dni 50 sztuk ciast (pierwszy wiersz w tabeli) to prawdopodobieństwo takiego poziomu sprzedaży oblicza się jako: $3/35 = 0,086$. Z kolei „Skumulowane prawdopodobieństwo” to tylko suma kolejnych prawdopodobieństw, czyli dla sprzedaży 52 sztuk ciasta będzie to: $0,086 + 0,114 + 0,057 = 0,257$. Cukiernik zajął również do zapisanych w zeszycie kosztów produkcji i cen sprzedaży.

Jeśli więc cukiernik wyprodukował 60 ciast, a sprzedał 50, to uzyskał zysk 500 zł. $500 = (50 \times 25) + (10 \times 9) - (60 \times 14)$ A gdyby wyprodukował 50 ciast mniej, zarobiłby o 50 zł więcej. $550 = (50 \times 25) - (50 \times 14)$ Aby zoptymalizować poziom produkcji, należy najpierw zapisać najprostsze zasady w postaci nierówności.

Jeśli więc cukiernik wyprodukował 60 ciast, a sprzedał 50, to uzyskał zysk 500 zł. $500 = (50 \times 25) + (10 \times 9) - (60 \times 14)$ A gdyby wyprodukował 50 ciast mniej, zarobiłby o 50 zł więcej. $550 = (50 \times 25) - (50 \times 14)$ Aby zoptymalizować poziom produkcji, należy najpierw zapisać najprostsze zasady w postaci nierówności.

Obliczenia do tych kolumn są bardzo proste. Jeżeli cukiernik sprzedał 3 razy w ciągu 35 dni 50 sztuk ciast (pierwszy wiersz w tabeli) to prawdopodobieństwo takiego poziomu sprzedaży oblicza się jako: $3/35 = 0,086$. Z kolei „Skumulowane prawdopodobieństwo” to tylko suma kolejnych prawdopodobieństw, czyli dla sprzedaży 52 sztuk ciasta będzie to: $0,086 + 0,114 + 0,057 = 0,257$. Cukiernik zajął również do zapisanych w zeszycie kosztów produkcji i cen sprzedaży.

Obliczenia do tych kolumn są bardzo proste. Jeżeli cukiernik sprzedał 3 razy w ciągu 35 dni 50 sztuk ciast (pierwszy wiersz w tabeli) to prawdopodobieństwo takiego poziomu sprzedaży oblicza się jako: $3/35 = 0,086$. Z kolei „Skumulowane prawdopodobieństwo” to tylko suma kolejnych prawdopodobieństw, czyli dla sprzedaży 52 sztuk ciasta będzie to: $0,086 + 0,114 + 0,057 = 0,257$. Cukiernik zajął również do zapisanych w zeszycie kosztów produkcji i cen sprzedaży.

Tabela 3. Tabela zysku według wariantów produkcji i sprzedaży

60	500	516	532	548	564	580	596	612	628	644	660	578.1
59	505	521	537	553	569	585	601	617	633	649	665	582.2
58	510	526	542	558	574	590	606	622	638	654	670	584.9
57	515	531	547	563	579	595	611	627	643	659	675	586.3
56	520	536	552	568	584	600	616	632	648	664	680	585.8
55	525	541	557	573	589	605	621	637	653	669	685	583.9
54	530	546	562	578	594	610	626	642	658	674	690	579.8
53	535	551	567	583	599	615	631	647	663	679	695	574.3
52	540	556	572	588	604	620	636	652	668	684	700	567.4
51	545	561	577	593	609	625	641	657	673	689	705	559.6
50	550	566	582	598	614	630	646	662	678	694	710	550
49	555	571	587	603	619	635	651	667	683	699	715	540
48	560	576	592	608	624	640	656	672	688	704	720	530
47	565	581	597	613	629	645	661	677	693	709	725	520
46	570	586	602	618	634	650	666	682	698	714	730	510
45	575	591	607	623	639	655	671	687	703	719	735	500
44	580	596	612	628	644	660	676	692	708	724	740	490
43	585	601	617	633	649	665	681	697	713	729	745	480
42	590	606	622	638	654	670	686	702	718	734	750	470
41	595	611	627	643	659	675	691	707	723	739	755	460
40	600	616	632	648	664	680	696	712	728	744	760	450
39	605	621	637	653	669	685	701	717	733	749	765	440
38	610	626	642	658	674	690	706	722	738	754	770	430
37	615	631	647	663	679	695	711	727	743	759	775	420
36	620	636	652	668	684	700	716	732	748	764	780	410
35	625	641	657	673	689	705	721	737	753	769	785	400
34	630	646	662	678	694	710	726	742	758	774	790	390
33	635	651	667	683	699	715	731	747	763	779	795	380
32	640	656	672	688	704	720	736	752	768	784	800	370
31	645	661	677	693	709	725	741	757	773	789	805	360
30	650	666	682	698	714	730	746	762	778	794	810	350
29	655	671	687	703	719	735	751	767	783	799	815	340
28	660	676	692	708	724	740	756	772	788	804	820	330
27	665	681	697	713	729	745	761	777	793	809	825	320
26	670	686	702	718	734	750	766	782	798	814	830	310
25	675	691	707	723	739	755	771	787	803	819	835	300
24	680	696	712	728	744	760	776	792	808	824	840	290
23	685	701	717	733	749	765	781	797	813	829	845	280
22	690	706	722	738	754	770	786	802	818	834	850	270
21	695	711	727	743	759	775	791	807	823	839	855	260
20	700	716	732	748	764	780	796	812	828	844	860	250
19	705	721	737	753	769	785	801	817	833	849	865	240
18	710	726	742	758	774	790	806	822	838	854	870	230
17	715	731	747	763	779	795	811	827	843	859	875	220
16	720	736	752	768	784	800	816	832	848	864	880	210
15	725	741	757	773	789	805	821	837	853	869	885	200
14	730	746	762	778	794	810	826	842	858	874	890	190
13	735	751	767	783	799	815	831	847	863	879	895	180
12	740	756	772	788	804	820	836	852	868	884	900	170
11	745	761	777	793	809	825	841	857	873	889	905	160
10	750	766	782	798	814	830	846	862	878	894	910	150
9	755	771	787	803	819	835	851	867	883	899	915	140
8	760	776	792	808	824	840	856	872	888	904	920	130
7	765	781	797	813	829	845	861	877	893	909	925	120
6	770	786	802	818	834	850	866	882	898	914	930	110
5	775	791	807	823	839	855	871	887	903	919	935	100
4	780	796	812	828	844	860	876	892	908	924	940	90
3	785	801	817	833	849	865	881	897	913	929	945	80
2	790	806	822	838	854	870	886	902	918	934	950	70
1	795	811	827	843	859	875	891	907	923	939	955	60

Nasz cukiernik przepisał wzór (2) w formie funkcji arkusza kalkulacyjnego. Skopiował ją i wkleił do komórek poniższej tabeli.

$$d(k) = \sum_{N=0}^p g(k, p) \times p(x)$$

(3)

Następny wzór jest tylko iloczynem wszystkich możliwych zysków z wielkości produkcji i wielkości sprzedaży oraz ich prawdopodobieństwa. Aby podjąć optymalną decyzję, należy wybrać największą wartość wektora d(k) opisanego wzorem (3).

Aby znaleźć optymalny poziom produkcji, należy wykorzystać rozkład prawdopodobieństwa zawarty w tabeli 2. Jeżeli więc pomnożymy prawdopodobieństwo wielkości sprzedaży przez zysk z każdego wariantu produkcji i sprzedaży z tabeli 3, otrzymamy tabelę 4.

Tabela 4. Zysk skorygowany o prawdopodobieństwo sprzedaży

	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	d(k)
48	47.14	62.86	31.43	47.14	47.14	78.57	47.14	62.86	47.14	47.14	31.43	550
49	46.71	64.11	32.06	48.09	48.09	80.14	48.09	64.11	48.09	48.09	32.06	559.629
50	46.29	63.54	32.69	49.03	49.03	81.71	49.03	65.37	49.03	49.03	32.69	567.429
51	45.86	62.97	32.4	49.97	49.97	83.29	49.97	66.63	49.97	49.97	33.31	574.314
52	45.43	62.4	32.11	49.54	50.91	84.86	50.91	67.89	50.91	50.91	33.94	579.829
53	45	61.83	31.83	49.11	50.49	86.43	51.86	69.14	51.86	51.86	34.57	583.971
54	44.57	61.26	31.54	48.69	50.06	85.71	52.8	70.4	52.8	52.8	35.2	585.829
55	44.14	60.69	31.26	48.26	49.63	85	52.37	71.66	53.74	53.74	35.83	586.314
56	43.71	60.11	30.97	47.83	49.2	84.29	51.94	71.09	54.69	54.69	36.46	584.971
57	43.29	59.54	30.69	47.4	48.77	83.57	51.51	70.51	54.26	55.63	37.09	582.257
58	42.86	58.97	30.4	46.97	48.34	82.86	51.09	69.94	53.83	55.2	37.71	578.171

Tak więc używając wzoru (3), gdy udało się sprzedać 50 ciast (pierwsza kolumna), a wyprodukowano 54 ciasta (piąty wiersz), zysk z działalności wynosi 530 zł.

Wartość tę mnożymy przez wartość prawdopodobieństwa sprzedaży 50 ciast, którą znajdziemy w tabeli 2.

$$45,428573 = 530 \times 0,08571429$$

Suma wszystkich prawdopodobieństw wiersza daje nam wartość w ostatniej kolumnie tabeli 4 oznaczonej jako d(k). Wartość tę opisuje również wzór (3).

Naszym zadaniem jest teraz znalezienie najwyższej wartości w kolumnie d(k). Okazuje się, że biorąc pod uwagę zysk ze sprzedaży i stratę z nadprodukcji oraz prawdopodobieństwo tej konfiguracji, najbardziej opłaca się produkować 57 ciast. Wartość sumy prawdopodobnego zysku wyniesie wtedy 586,31 zł.

Czy warto?

Przedstawiona metoda jest chyba najprostszą możliwą do przeprowadzenia optymalizacją matematyczną. Każdy kto chce zmaksymalizować swój zysk, musi prędzej czy później spotkać się z koniecznością kalkulacji strat i zysków w zestawieniu z ich prawdopodobieństwem.

Przedstawiony sposób może być bardzo łatwo wprowadzony do arkusza kalkulacyjnego, dzięki czemu może służyć do optymalizacji wielkości produkcji dla wielu różnych produktów.

Wojciech Moszczyński



Z dobrego upieczesz najlepsze!

I ♥ GOFRY



SPRAWDŹ
CZERWCOWĄ
PROMOCJĘ!

KOMPLET
Gofry

100% mieszanka do przygotowywania chrupiących gofrów, racuchów i naleśników.



KOMPLET Polska

www.komplet.pl