

Optimalizacja procesu wykorzystania surowców cukierniczych za pomocą metod programowania liniowego



Optimalizacja to proces, którego celem jest znalezienie określonej konfiguracji nakładów i działań, które prowadzą do uzyskania najlepszych z możliwych rezultatów. Może to być maksymalizacja zysku ze sprzedanych produktów, minimalizacja kosztów zużycia surowców lub poziom prawdopodobieństwa przeterminowania drogich dodatków cukierniczych. Optimalizacja jest więc procesem, który dąży do osiągnięcia wyników ekstremalnych. Zasadniczo właściciel cukierni może wyznaczyć tylko jeden cel optymalizacji¹.

Wynikiem optymalizacji będzie jasna wskazówka, jakie działania należy podjąć, aby osiągnąć maksymalny poziom wyznaczonego celu. Skuteczną optymalizację można przeprowadzić wyłącznie metodą programowania liniowego. Metoda ta opiera się na równaniach i nierównościach matematycznych. Osobiście nie znam nikogo, kto lubiłby matematykę. Nie znam też nikogo, kto by nie wykorzystywał kalkulacji do zarabiania lub przeliczania. Z matematyką wiążą się więc ambiwalentne emocje. Z jednej strony unikamy jej, a z drugiej – nie potrafimy bez niej żyć.

Planowanie to jeden z najważniejszych elementów zarządzania cukiernią. Od jego jakości zależy wynik ekonomiczny. Pojawia się wiele niewiadomych, spośród których wymienić można poziom popytu lub przyszłe ceny surowców. Instynktownie czujemy, że umiejętnie kalkulując, możemy podnieść nasze zarobki, skrócić czas dojazdu albo zminimalizować ryzyko. Czasem widzimy niepowodzenia naszych działań, odkrywamy nasze błędy, liczymy straty. Bardzo często zmuszeni jesteśmy zdać się na ślepy los. Na pewno przydałoby się dodatkowe narzędzie w postaci lepszego kalkulatora lub programu do planowania.

Badania operacyjne

Aby planować lepiej, musimy wznieść się ponad intuicję i własne doświadczenia, wejść głęboko w analizę matematyczną, działania różniczkowe, wzory i wykresy. Kto ma dzisiaj na to czas? Czy właściciel cukierni musi być też matematykiem?

Jako zwykli ludzie niechętnie wchodzimy na nieznaną gruntu, zwłaszcza gruntu przepojony zasadami i równaniami, gruntu spowity mgłą abstrakcyjnych wyrażeń matematycznych. Prawda jest jednak inna.

Metody matematycznego planowania produkcji są bardzo proste i nie warto się ich obawiać. Optimalizacja polega na dwóch krokach: sformułowaniu nierówności matematycznych oraz wprowadzeniu ich do kalkulatora online.

¹ Istnieją metody łączące kilka celów optymalizacji. Odbyna się to przez określenie pojedynczego celu w postaci wskaźnika złożonego z wielu celów cząstkowych. Wyznaczenie pojedynczego celu jest najbardziej efektywną metodą optymalizacji.

Pierwszy krok wydaje się trudny i faktycznie może taki być, lecz jeżeli mamy kilka dobrych przykładów, możemy po prostu przepisać wzory, podstawiając własne wartości. Warto też zauważyć, że gdy raz uda nam się coś zoptymalizować, będziemy mogli te same wzory zastosować w innych przypadkach. Czasem warto zrobić krok w kierunku nowych technologii. Zwłaszcza, gdy nie wiąże się to z żadnymi wydatkami.

Dzięki tej publikacji oraz kalkulatorom simplex dostępnym w sieci online można będzie stosunkowo łatwo i bezboleśnie wprowadzić nową technologię planowania produkcji. Użyjemy algorytmów, tzn. programowania liniowego. Algorytmów na tyle prostych, aby zrozumiał je każdy, kto miał nawet minimalny kontakt z matematyką.

Czym jest i kiedy powstało programowanie liniowe?

Programowanie liniowe wynalazł w 1939 roku radziecki ekonomista Leonid Kantorowicz. Metoda ta była szeroko wykorzystywana przez aliantów podczas II wojny światowej. Mając ograniczone zasoby, musieli oni optymalnie nimi dysponować. Podczas planowania starano się zmniejszać ryzyko utraty ładunków przez konwoje, maksymalizować skutki nalotów dywanowych i matematycznie minimalizować straty w ludziach. Równania optymalizacyjne zmniejszyły ryzyko opóźnień w dostawach zaopatrzenia oraz wskazywały, jak najlepiej wykorzystywać dostępne zasoby. Stosowane wtedy algorytmy były bardzo skomplikowane. Tuż po wojnie, w roku 1947, George Dantzig, analityk sił powietrznych Stanów Zjednoczonych, uprościł metody optymalizacji, jednocześnie wprowadzając szereg innowacji analitycznych. Dzięki temu programowanie liniowe stało się powszechne w obszarach planowania produkcji i logistyce we wszystkich branżach na całym świecie.

Planowanie procesu wykorzystania surowców za pomocą programowania liniowego

Cukiernia ma w magazynie jedną tonę galaretki N1 oraz pół tony dodatków N2. Surowce mają krótką datę ważności i trzeba je jak najszybciej wykorzystać.

Cukiernia produkuje cztery rodzaje ciastek kruchych. Do ich produkcji niezbędne jest zastosowanie wspomnianych dwóch surowców N1 i N2. Receptury wymagają jednoczesnego zastosowania obu surowców.

Cukiernik musi szybko zużyć zalegające w magazynie surowce, wybierając produkcję tych ciastek, które przyniosą mu największy zysk. Jednocześnie produkcja ta ma zużyć jak najwięcej galaretki N1 i dodatków N2, ponieważ grozi im utylizacja.

W poniższej tabeli znajdują się cztery produkty cukiernicze. Pokazane są niezbędne ilości surowców N1 i N2 do produkcji 1000 kg ciastek. Zużycie surowców pokazane jest w kg/t produkcji.

	Galaretka N1	Dodatek N2	Zysk z tony
Ciastka Babci Ani	24 kg	19 kg	200 zł/t
Ciastka Beatek	15 kg	21 kg	180 zł/t
Ciastka Rodeo kruche	27 kg	30 kg	400 zł/t
Ciastka Dyżma	15 kg	8 kg	150 zł/t
Limity surowców	≤1000 kg	≤500 kg	

W ostatniej kolumnie podano szacowany zysk za 1000 kg wyrobu. Najbardziej opłacalna jest produkcja ciastek „Rodeo kruche” (zysk 400 zł/t), najmniej ciastek „Dyżma” (150 zł/t).

W ostatnim wierszu podano ograniczenia zużycia surowców. Nie można zużyć więcej niż 1000 kg galaretki N1, zaś dodatku N2 więcej niż 500 kg.

Z uwagi na małą skalę produkcji, właściciel cukierni musi zdecydować się na wytworzenie tylko jednego, konkretnego produktu.

Kalkulacje bez zastosowania programowania liniowego

Punktem wyjścia planowania jest wskazanie zmiennej decyzyjnej. Jest nią planowana ilość ton ciastek. Naszym ograniczeniem jest ilość niezbędnych surowców.

Tak więc, jeżeli zdecydujemy się wyprodukować $x_1 = 30$ t ciastek „Babci Ani”, to zgodnie z tabelką możemy policzyć, ile zużyjemy surowców:

$$24 \text{ kg/t} \times 30 \text{ ton} = 720 \text{ kg} \quad (\text{galaretka N1})$$

$$19 \text{ kg/t} \times 30 \text{ ton} = 570 \text{ kg} \quad (\text{dodatek N2})$$

$$30 \text{ ton} \times 200 \text{ zł/t} = 6000 \text{ zł} \quad (\text{Zysk całkowity})$$

Ponieważ przyjęliśmy, że ilość produkcji $x_1 = 30$ t, więc:

$$24 \text{ kg/t} \times x_1 \text{ ton} \quad (\text{galaretka N1})$$

$$19 \text{ kg/t} \times x_1 \text{ ton} \quad (\text{dodatek N2})$$

$$x_1 \text{ ton} \times 200 \text{ zł/t} \quad (\text{Zysk całkowity})$$

Niestety przekroczyliśmy limit dla dodatku N2. Tego surowca mamy w magazynie tylko 500 kg. Dodatkowo zostało nam jeszcze w magazynie

280 kg galaretki N1, którą chcieliśmy zużyć przy jednorazowym uruchomieniu tej produkcji. Jeżeli zmniejszymy ilość ton ciastek „Babci Ani”, spowodujemy zmniejszenie zysków oraz zwiększenie ilości niewykorzystanej galaretki N1.

Formułowanie funkcji celu

Zarówno w życiu, jak i w matematyce, aby coś zoptymalizować, musimy mieć określony cel. Naszym celem jest maksymalizacja zysku z produkcji ciastek.

Jeżeli przyjmiemy, że:

x_1 to szukana ilość t ciastek „Babci Ani”,

x_2 to szukana ilość t ciastek „Beatek”,

x_3 to szukana ilość t ciastek „Rodeo kruche”,

x_4 to szukana ilość t ciastek „Dyżma”,

to funkcję celu możemy sformułować jako:

$$F(x_{i,j,k,l}) = 200x_1 + 180x_2 + 400x_3 + 150x_4 \rightarrow \max \quad (1)$$

Właśnie sformułowaliśmy funkcję celu modelu programowania liniowego.

Gdybyśmy zdecydowali się, że będziemy produkowali 30 t ciastek „Babci Ani”, wtedy:

$$x_1 = 30,$$

$$x_2 = 0,$$

$$x_3 = 0,$$

$$x_4 = 0,$$

wtedy:

$$F(x_{i,j,k,l}) = 200 \text{ zł} \times 30 \text{ ton} = 6000 \text{ zł}$$

Formułowanie nierówności liniowych

Zgodnie z założeniami nie możemy zużyć więcej galaretki N1 i dodatku N2 niż mamy w magazynie cukierni. Mając do dyspozycji tabelkę pokazującą zużycie surowców, możemy z łatwością wypisać wzory przedstawiające ograniczenia.

$$\begin{cases} 24x_1 + 15x_2 + 27x_3 + 15x_4 \leq 1000 & (2) \\ 19x_1 + 21x_2 + 30x_3 + 8x_4 \leq 500 & (3) \end{cases}$$

Gdybyśmy teraz postanowili, że produkujemy 30 t ciastek „Babci Ani”, czyli $x_1 = 30$, uzyskamy taki wynik:

$$\begin{cases} 24 \times 30 + 15 \times 0 + 27 \times 0 + 15 \times 0 \leq 1000 \\ 19 \times 30 + 21 \times 0 + 30 \times 0 + 8 \times 0 \leq 500 \end{cases}$$

Ostatnia nierówność nie jest spełniona, ponieważ 19 razy 30 to 570, a ograniczenie wynosi 500.

Aby model liczył właściwie, musimy dodać jeszcze warunki, że ilości ton ciastek, jakie chcemy uzyskać muszą być większe lub równe zero. Komplet nierówności modelu ma więc postać:

$$\begin{cases} 24x_1 + 15x_2 + 27x_3 + 15x_4 \leq 1000 & (2) \\ 19x_1 + 21x_2 + 30x_3 + 8x_4 \leq 500 & (3) \\ x_1 \geq 0 & (4) \\ x_2 \geq 0 & (5) \\ x_3 \geq 0 & (6) \\ x_4 \geq 0 & (7) \end{cases}$$

Do tego zestawu dodajemy funkcję celu (1):

$$F(x_{i,j,k,l}) = 200x_1 + 180x_2 + 400x_3 + 150x_4 \rightarrow \max$$