

Dylemat wyboru według teorii badań operacyjnych. Przypadek sprzedaży urządzeń piekarskich



Każdy człowiek kilka razy dziennie staje przed dylematem, co wybrać. Załóżmy, że musimy kupić masło. Mamy do wyboru trzy różne rodzaje, w różnych cenach. Nazwijmy kostki masła: x_1 , x_2 , x_3 . Jeżeli zdecydujemy się na kupno jednego z produktów, np. kostki x_1 , wtedy liczba kostek kupionego masła będzie równa jeden.

Matematycznie możemy zapisać to tak:

$x_1 = 1$, kupiliśmy 1 kostkę masła 1

$x_2 = 0$, kupiliśmy 0 kostek masła 2

$x_3 = 0$, kupiliśmy 0 kostek masła 3.

Ponieważ chcemy kupić jedną kostkę masła z trzech dostępnych, równanie wyboru będzie miało poniższą postać (1),

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (1)$$

Zawsze podejmujemy decyzję w oparciu o jakieś kryterium. W tym przypadku podejmujemy decyzję na podstawie ceny. Chcemy wybrać masło, które ma najniższą cenę. W takim wypadku funkcja celu naszego zakupu będzie miała postać równania (2).

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4,9x_1 + 5,2x_2 + 5,9x_3 \rightarrow \min \quad (2)$$

gdzie:

cena kostki x_1 to 4,9 zł,

cena kostki x_2 to 5,2 zł,

cena kostki x_3 to 5,9 zł.

Należy też wprowadzić ograniczenia znakowe, nie można kupić mniej masła niż zero i nie więcej niż jeden. Ilość zakupów musi być wyrażona liczbą rzeczywistą. Można zapisać to jako warunek ograniczający (3).

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \text{ lub } x_1 = 0 \\ x_2 &= 1 \text{ lub } x_2 = 0 \\ x_3 &= 1 \text{ lub } x_3 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

W ten sposób, tworząc równania i nierówności (1), (2) i (3), zbudowaliśmy zadanie programowania operacyjnego.

Wyprzedaż maszyn piekarskich

Pewna duża piekarnia w ramach procesu modernizacji postanowiła sprzedać kilka maszyn, po zaniżonej cenie, zaprzyjaźnionym kooperantom oraz pracownikom. Określiła przedziały cenowe, za jakie chce sprzedać urządzenia. Ze względu na okazyjną formę sprzedaży przyjęto założenie, że każdy oferent może kupić jedną maszynę. Zgłosiło się siedmiu oferentów i każdy przedstawił swoje ceny.

Całe przedsięwzięcie powierzono księgowemu, który miał na operacji zarobić 10% wartości sprzedaży. Był więc zainteresowany sprzedażą majątku po jak najwyższej cenie. Postanowił zoptymalizować proces, tak aby zarobić więcej.

Dylemat księgowego

Ceny zaproponowane przez kooperantów nie różniły się wiele od siebie. Najwyższą cenę za miesiarkę planetarną (3,5 tys. zł) chciała zapłacić piekarnia Falenty, zaś najniższą – piekarnia Morsk (2,1 tys. zł). Różnica między najniższą a najwyższą ceną wynosi więc 1400 zł. Jednak Falenty chciały też za najwyższą cenę kupić piec. Jak Falenty kupiłyby miesiarkę, to nie mogłyby kupić pieca. A przecież są jeszcze inne urządzenia, za które również Falenty chciały zapłacić najwyższą cenę. To właśnie dylemat wyboru. Celem jest takie skonfigurowanie sprzedaży, aby zarobić najwięcej.

Dodatkowo trzeba wyeliminować dwóch oferentów, ponieważ nie starczy dla nich maszyn. Jak wybrać, aby zarobić jak najwięcej?

Zestawienie równań konkursowych

Podobnie jak przy zakupie masła, teraz podobne równania musimy zastosować dla problemu wyboru sprzedaży. Tym razem równań będzie więcej.

Tabela 1. Propozycje cenowe zakup maszyn

Oferty :	Piec	Wymiennik	Miesiarka plan.	Mikser spir.	Krajalnica
Piekarnia Szamoty	19.0 tys. zł	6.6 tys. zł	2.3 tys. zł	9.2 tys. zł	5.0 tys. zł
Piekarnia Morsk	17.3 tys. zł	7.2 tys. zł	2.1 tys. zł	8.9 tys. zł	5.1 tys. zł
Pracownik 1	18.3 tys. zł	7.8 tys. zł	2.8 tys. zł	8.5 tys. zł	5.7 tys. zł
Pracownik 2	18.1 tys. zł	7.4 tys. zł	2.4 tys. zł	8.1 tys. zł	4.8 tys. zł
Piekarnia Krystyna	18.6 tys. zł	8.6 tys. zł	2.6 tys. zł	8.9 tys. zł	5.9 tys. zł
Szkoła piekarnicza	18.0 tys. zł	8.2 tys. zł	3.1 tys. zł	7.9 tys. zł	5.6 tys. zł
Piekarnia Falenty	19.3 tys. zł	8.2 tys. zł	3.5 tys. zł	9.4 tys. zł	5.7 tys. zł

Przed wszystkim musimy zapisać, że każdy kontrahent może kupić tylko jedno urządzenie. Czyli suma nabytych przez nich maszyn musi wynosić 1. Równania (4-10) opisują matematycznie ten warunek. W poniższych równaniach np. x_{14} oznacza zakup przez piekarnię Szamoty (jedynka oznacza pierwszy wiersz w tabeli) miksera spiralnego (czwórka oznacza czwartą kolumnę w tabeli 1). Jeżeli $x_{14} = 0$ oznacza to, że piekarnia Szamoty nie kupi miksera, zaś gdy $x_{14} = 1$ oznacza to, że piekarnia dokona zakupu.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 1 & (4) \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 1 & (5) \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} = 1 & (6) \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} = 1 & (7) \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} = 1 & (8) \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} + x_{67} = 1 & (9) \\ x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} + x_{77} = 1 & (10) \end{cases}$$

Trzeba też wziąć pod uwagę, że maszyna może być sprzedana tylko raz, co można zapisać jako:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 1 & (11) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} = 1 & (12) \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} = 1 & (13) \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} + x_{74} = 1 & (14) \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} + x_{75} = 1 & (15) \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} + x_{76} = 1 & (16) \\ x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} + x_{77} = 1 & (17) \end{cases}$$

Na przykład $x_{53} = 1$ oznacza, że piekarnia Krystyna (wiersz 5) kupiła miesiarkę planetarną (kolumna 3).
Te mozolnie wypisywane wzory można zapisać prostym wzorem, w którym I to zbiór urządzeń, a J to zbiór kontrahentów.

$$1 \geq x_{(i,j)} \geq 0 \dots \forall i \in I, j \in J$$
$$x_{(i,j)} \in \mathbb{Z}^+ \dots \forall i \in I, j \in J$$

W równaniach pojawiło się więcej kolumn niż jest to zapisane w tabeli 1. W formułowaniu równań ograniczających oraz równania funkcji celu niezbędne jest zachowanie warunku, aby liczba kontrahentów i liczba urządzeń była taka sama. Tak więc $x_{67} = 1$ oznacza, że szkoła piekarska (6 wiersz w tabeli) kupi urządzenie 7, czyli coś, czego nie ma, czyli nie kupi nic.

Funkcja celu

Trzeba przyznać, że sformułowanie równań (4-17) było bardzo proste. Niestety zapisanie funkcji celu w problemie wyboru jest o wiele trudniejsze.

$$F(x_{i,j})$$
$$= (19.0 \times x_{11}) + (6.6 \times x_{12}) + (2.3 \times x_{13}) + (9.2 \times x_{14}) + (5.0 \times x_{15}) + (0 \times x_{16}) + (0 \times x_{17}) + (17.3 \times x_{21}) + (7.2 \times x_{22}) + (2.1 \times x_{23}) + (8.9 \times x_{24}) + (5.1 \times x_{25}) + (0 \times x_{26}) + (0 \times x_{27}) + (18.3 \times x_{31}) + (7.8 \times x_{32}) + (2.8 \times x_{33}) + (8.5 \times x_{34}) + (5.7 \times x_{35}) + (0 \times x_{36}) + (0 \times x_{37}) + (18.1 \times x_{41}) + (7.4 \times x_{42}) + (2.4 \times x_{43}) + (8.1 \times x_{44}) + (4.8 \times x_{45}) + (0 \times x_{46}) + (0 \times x_{47}) + (18.6 \times x_{51}) + (8.6 \times x_{52}) + (2.6 \times x_{53}) + (8.9 \times x_{54}) + (5.9 \times x_{55}) + (0 \times x_{56}) + (0 \times x_{57}) + (18.0 \times x_{61}) + (8.2 \times x_{62}) + (3.1 \times x_{63}) + (7.9 \times x_{64}) + (5.6 \times x_{65}) + (0 \times x_{66}) + (0 \times x_{67}) + (19.3 \times x_{71}) + (8.2 \times x_{72}) + (3.5 \times x_{73}) + (9.4 \times x_{74}) + (5.7 \times x_{75}) + (0 \times x_{76}) + (0 \times x_{77}) \quad (18)$$
$$\rightarrow \max$$

Liczbę w funkcji celu to ceny zaproponowane przez kontrahentów. Tak więc na przykład wartość $(19.0 \times x_{11})$ oznacza, że piekarnia Szamoty kupi piec za kwotę 19 tys. zł.
Ten niezwykle pracochłonny wzór funkcji celu (18) można łatwo zastąpić prostym sformułowaniem, gdzie c oznacza zaoferowaną cenę, zaś x oznacza transakcję o wartości 0 lub 1.

$$\sum_{i \in I, j \in J} c_{(i,j)} x_{(i,j)} \rightarrow \min$$

Wynik algorytmu

Aby uzyskać wynik algorytmu należy wprowadzić do kalkulatora simplex funkcję celu (18) oraz równania ograniczające (4-17). Nie można również zapomnieć o ograniczeniach znakowych. Liczba zakupionych urządzeń może wynosić tylko 1 lub 0. Kalkulatory simplex są dostępne online w sieci internet. W tym przypadku mamy dużą liczbę wzorów do wprowadzania.

Tabela 2. Wynik konkursu na zakup maszyn

Oferty :	Piec	Wymiennik	Miesiarka plan.	Mikser spir.	Krajalnica
Piekarnia Szamoty	--	--	--	9.2 tys. zł	--
Piekarnia Morsk	--	--	--	--	--
Pracownik 1	--	--	--	--	5.7 tys. zł
Pracownik 2	--	--	--	--	--
Piekarnia Krystyna	--	8.6 tys. zł	--	--	--
Szkoła piekarska	--	--	3.1 tys. zł	--	--
Piekarnia Falenty	19.3 tys. zł	--	--	--	--

Na szczęście to jedyna trudność w uzyskaniu odpowiedzi. Tabela poniżej pokazuje optymalne rozwiązanie zadania.
Łączny przychód ze sprzedaży urządzeń wyniósł 45 900 zł, z czego księgowy zarobił 459 zł. Co by się stało, gdyby księgowy wskazał firmy, które dawały najwyższe ceny za urządzenia? Wstępne szacunki wskazują, że zależnie od kolejności sprzedaży, piekarnia zawsze uzyskała by niższe przychody: od 400 do nawet 700 zł.

Wojciech Moszczyński
(współpraca Ewa Moszczyńska)

Wojciech Moszczyński – absolwent Katedry Ekonometrii i Statystyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, specjalista z zakresu ekonometrii, data science oraz rachunkowości zarządczej. Specjalizuje się w optymalizacji procesów produkcyjnych i logistycznych. Prowadzi badania w obszarze rozwoju i zastosowania sztucznej inteligencji. Od lat zaangażowany w popularyzację ekonometrii oraz data science w środowiskach biznesowych